



TITLE:

New Stokes curves of higher order Painleve equations (I) (Recent Trends in Microlocal Analysis)

AUTHOR(S):

西川, 享宏

CITATION:

西川, 享宏. New Stokes curves of higher order Painleve equations (I) (Recent Trends in Microlocal Analysis). 数理解析研究所講究録 2005, 1412: 176-188

ISSUE DATE:

2005-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/24910>

RIGHT:

New Stokes curves of higher order Painlevé equations I

京都大学数理解析研究所 西川 享宏 (Yukihiko Nishikawa)
RIMS, Kyoto University

1 序文

[KT1],[KT2],[KT3],[AKT1],[T] において Painlevé 方程式に対する WKB 解析が議論され, WKB 解析が Painlevé 方程式の解の接続公式を考える上で非常に有効に用いられることが示された. この議論においては Painlevé 方程式と対応する Lax pair との関係が重要な役割を果たしていた. ここで Lax pair とはその両立条件を計算すれば Painlevé 方程式が導かれる 2 つの線形方程式の組のことである. そして [N] ではこの事実を考慮に入れ, この議論を Lax pair を持つ高階非線形方程式に拡張することを考え, [GJP] で構成された Lax pair を持つ非線形方程式の階層である P_{II} hierarchy と P_{IV} hierarchy に対する WKB 解析を議論した. この議論により Painlevé 方程式の WKB 解析の手法がこれらの方程式に自然に拡張されることが確認され, さらには高階線形方程式のときと同様に新しい Stokes 曲線が存在することも確認された. 詳しい証明等は [KKNT],[N] に譲るが, 今回はその P_{II} hierarchy の 2 番目の方程式に注目し, その方程式に対する WKB 解析の議論を具体的な式と図を中心にして話しを進めて行く.

2 P_{II} hierarchy の 2 番目の方程式とその Lax pair

P_{II} hierarchy の 2 番目の方程式とは次の非線形方程式のことである.

$$\frac{1}{4} \left(\eta^{-2} u'' - 3\eta^{-1} u u' + u^3 + 6uv \right) + c \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta - \eta^{-1} g/2 \end{pmatrix}. \quad (P)$$

ここで u, v が従属変数, t が独立変数, η が large parameter, c, g, δ は定数である. この式から v を消去することにより, この方程式を同値な u についての単独の方程式に書き直すこともできる.

$$\begin{aligned} \eta^{-4} u^{(4)} = & \frac{1}{2u^2} \left[\eta^{-4} (-4(u')^2 u'' + 3u(u'')^2 + 4uu'u^{(3)}) \right. \\ & + \eta^{-2} (16guu' - 16gt(u')^2 + 5u^3(u')^2 + 16gtuu'' + 10u^4 u'') \\ & \left. + 16g^2 t^2 u - 16c^2 u^3 - 48\delta u^3 - 16gtu^4 - 24cu^5 - 5u^7 \right]. \end{aligned}$$

この方程式は次のような対応する Lax pair を持つ.

$$\text{Lax pair: } \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \Psi = \eta A \Psi & (SL) \\ \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \eta B \Psi. & (D) \end{cases}$$

ここで

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & -A_{11} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -x + u/2 & 1 \\ -v & x - u/2 \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix},$$

$$A_{11} = -\frac{1}{2g} [4x^3 + 2vx + 2uv + \eta^{-1}v'] - \frac{2c}{g}x - t,$$

$$A_{12} = \frac{1}{2g} [4x^2 + 2ux + u^2 + 2v - \eta^{-1}u'] + \frac{2c}{g},$$

$$A_{21} = \frac{1}{2g} [-4vx^2 - (2uv + 2\eta^{-1}v')x + v^2 + 2u^2v + \eta^{-1}uv' - \eta^{-1}u'v] - \frac{2\delta}{g} + \eta^{-1}.$$

この2つの線形方程式の両立条件

$$\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial x} + \eta(AB - BA) = 0$$

を考えると非線形方程式 (P) が導かれる.

3 非線形方程式 (P) の turning point と Stokes 曲線

3.1 0-パラメータ解の構成

まず最初に非線形方程式 (P) の形式解を構成する. ここでは次のような形を持つ η についての形式的ベキ級数解を考える.

$$\begin{cases} u = \hat{u}(t, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t) \eta^{-i} \\ v = \hat{v}(t, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i(t) \eta^{-i}. \end{cases} \quad (1)$$

この形式解はこの式を非線形方程式 (P) に代入し η についての各ベキの係数を比較することにより構成することができる. 特に, η についての0次の係数として現れる2式

$$\begin{aligned} (u_0(t)^3 + 6u_0(t)v_0(t) + 4cu_0(t) + 4gt)/4 &= 0, \\ (3u_0(t)^2v_0(t) + 3v_0(t)^2 + 4cv_0(t) - 4\delta)/4 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

から $v_0(t)$ を消去すると

$$5u_0(t)^6 + 24cu_0(t)^4 + 16gtu_0(t)^3 + 12\delta u_0(t)^2 + 16c^2u_0(t)^2 - 16g^2t^2 = 0 \quad (3)$$

という $u_0(t)$ についての6次式が現れる. よって, $u_0(t)$ はこの式をみたすように構成することとなり, $u_0(t)$ は6個の多価関数となる. このように $u_0(t)$ を決定すれば残りの $v_0(t), u_j(t), v_k(t)$ ($j, k \geq 1$) についても (2) の Jacobian が消えない点では順次一意的に決まっていく. このようにして構成された解を0-パラメータ解と呼ぶ.

3.2 線形化方程式とその特性方程式

次に非線形方程式 (P) の 0-パラメータ解での線形化方程式を考える. $\hat{u} + \Delta u, \hat{v} + \Delta v$ を非線形方程式 (P) の u, v に代入し $\Delta u, \Delta v$ について 1 次の項をとってくると

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (\eta^{-2} \partial_t^2 - 3\eta^{-1} \hat{u} \partial_t - 3\eta^{-1} \hat{u}' + 3\hat{u}^2 + 6\hat{v} + 4c) \Delta u + \frac{1}{4} (6\hat{u}) \Delta v &= 0 \\ \frac{1}{4} (3\eta^{-1} \hat{v}' + 6\hat{u} \hat{v}) \Delta u + \frac{1}{4} (\eta^{-2} \partial_t^2 + 3\eta^{-1} \hat{u} \partial_t + 3\hat{u}^2 + 6\hat{v} + 4c) \Delta v &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

が得られる. これが非線形方程式 (P) の 0-パラメータ解での線形化方程式である. ここで $\eta^{-1} \partial_t$ を ν で置き換え, η について 0 次の項をとり, その係数行列の行列式を考えると

$$\begin{aligned} C(t, \nu) &= \frac{1}{16} [\nu^4 + (12v_0 + 8c - 3u_0^2) \nu^2 + 9u_0^4 + 36v_0^2 + 16c^2 + 24cu_0^2 + 48cv_0] \\ &= \frac{1}{16} \left[\nu^4 + \frac{1}{u_0} (-5u_0^3 - 8gt) \nu^2 + \frac{1}{u_0^2} (10u_0^6 + 24cu_0^4 + 8gtu_0^3 + 16g^2t^2) \right] \end{aligned} \quad (5)$$

が得られる. この式を線形化方程式 (4) の特性方程式という. この式が ν^2 の多項式になっていることに注意する. この特性方程式を用いて非線形方程式 (P) の turning point と Stokes 曲線を次のように定義する.

定義 3.1 (非線形方程式 (P) の turning point と Stokes 曲線)

- (i) $C(\tau, \nu) = 0$ が重根を持つ時 $t = \tau$ は (P) の *turning point* と呼ぶ.
- (ii) $t = \tau$ が (P) の *turning point*, $\nu_j(t)$ と $\nu_{j'}(t)$ が $t = \tau$ で合流する $C(\tau, \nu) = 0$ の 2 つの根である時, $t = \tau$ から伸びる

$$\Im \int_{\tau}^t (\nu_j(t) - \nu_{j'}(t)) dt = 0$$

で定義される曲線を (P) の *Stokes 曲線* と呼ぶ.

- (iii) $t = \tau$ が (P) の *turning point* であるとき

- (I) $C(\tau, \nu) = 0$ が重根 $\nu = 0$ を持つなら $t = \tau$ を第 1 種の *turning point* と呼ぶ.
- (II) $C(\tau, \nu) = f(\tau, \nu^2)$ とおいたとき, $f(\tau, x) = 0$ が重根を持つなら $t = \tau$ を第 2 種の *turning point* と呼ぶ.

ここで特性方程式 $C(t, \nu) = 0$ の係数に 0-パラメータ解の 0 次の項 $u_0(t)$ が存在したと, またその $u_0(t)$ が 6 次の代数方程式から決まる 6 個の多価関数として求まったことに注意すると, この非線形方程式 (P) の turning point と Stokes 曲線は $u_0(t)$ の Riemann 面上で考えられるのが自然であると考えられる. そこで少し $u_0(t)$ の Riemann 面の構造

について考えてみる (詳細は [NT] 参照). まず, $u_0(t)$ の定義より $u_0(t)$ が 6 価の多価関数であることがわかる. 次に, 第 1 種の turning point の定義より $u_0(t)$ は第 1 種の turning point に特異点を持ち, 一般にはそこでの特異性は $1/2$ 乗の特異性となる. (実際に後で定めるパラメータではそうなっている.) よって, $u_0(t)$ の Riemann 面を表現するには $u_0(t)$ の各分枝に対応した 6 枚の sheet (\mathbb{C} のコピー) を用意し, 第 1 種の turning point から $u_0(t)$ の分枝を区別する cut を適当に伸ばせばよい. 特に $u_0(t)$ の特異点での特異性を考慮すると異なる sheet 上にある同じ第 1 種の turning point から伸びる 2 本の cut はペアになっているはずである. この Riemann 面の構造を考慮に入れてパラメータを ([N] とはパラメータの値が異なっているが) $c = 9.8 - 0.1i$, $g = 7.6 + 6.6i$, $\delta = -6.2 - 5.6i$ とし, $u_0(t)$ の Riemann 面上にこの定義に従い非線形方程式 (P) の turning point と Stokes 曲線を描いてみる. ここで τ_i^I ($1 \leq i \leq 8$) が第 1 種の turning point, τ_i^{II} ($1 \leq i \leq 4$) が第 2 種の turning point, 波線が $u_0(t)$ の分枝を区別するための cut である. T_i ($1 \leq i \leq 20$) は Stokes 曲線の交点であるがこれについては後で説明する.

非線形方程式 (P) の Stokes 曲線

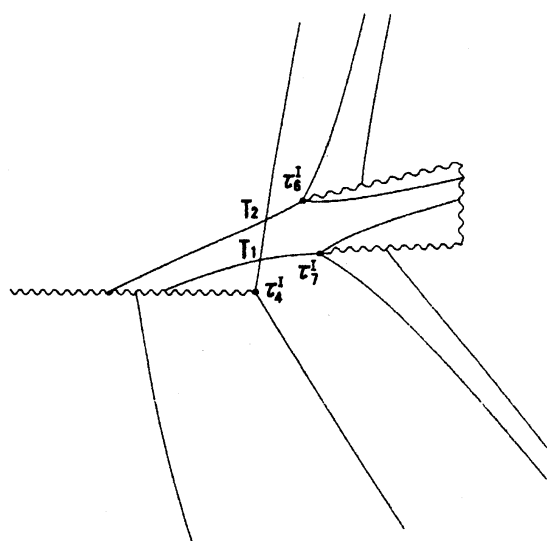


図 1: 1st sheet

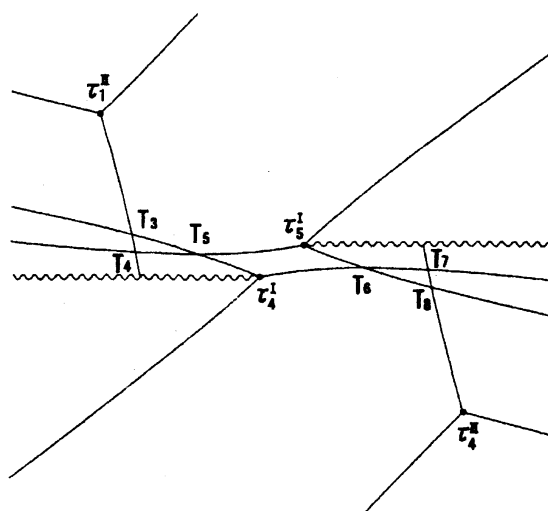


図 2: 2nd sheet

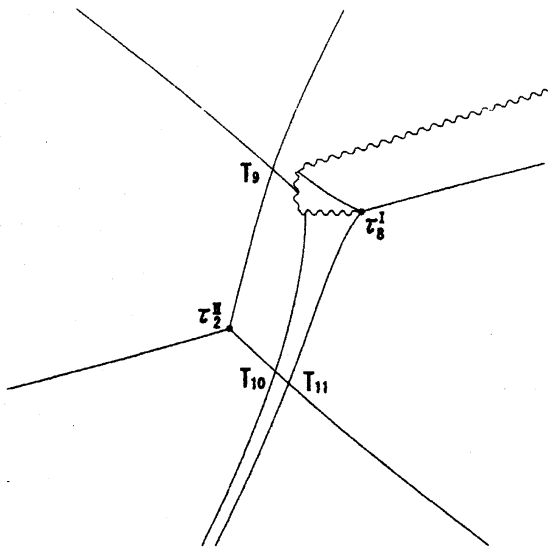


図 3: 3rd sheet

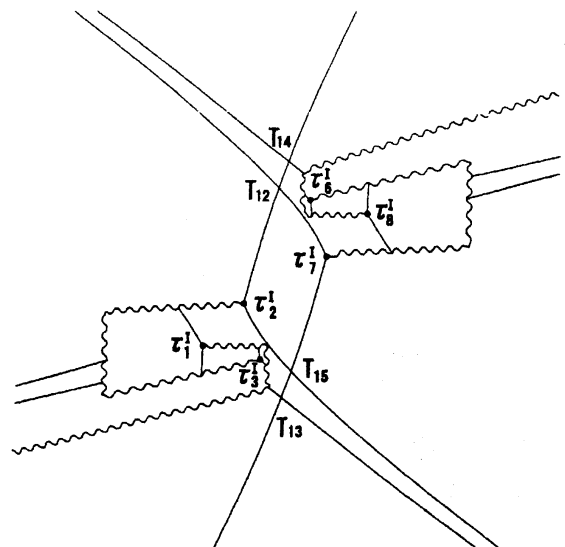


図 4: 4th sheet

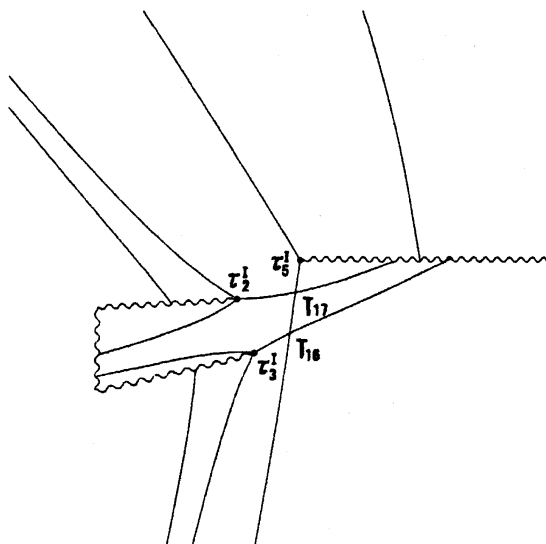


図 5: 5th sheet

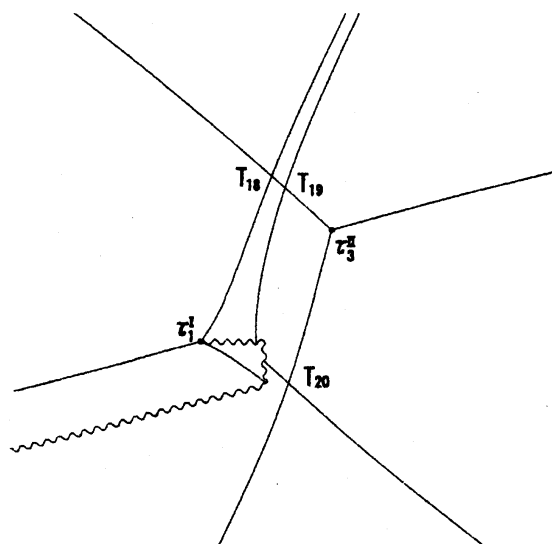


図 6: 6th sheet

4 線形方程式 (SL) の turning point と Stokes 曲線

この節では 0-パラメータ解を代入した Lax pair を考え, その片側である線形方程式 (SL) の turning point と Stokes 曲線を定義する. あとで見るようにこの Lax pair と非線形方程式には幾つかの興味深い関係がある.

Lax pair の各係数に 0-パラメータ解を代入し次のような展開を得る.

$$\begin{aligned} A|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} &= A_0(x, t) + \eta^{-1} A_1(x, t) + \cdots, \\ B|_{\substack{u=\hat{u} \\ v=\hat{v}}} &= B_0(x, t) + \eta^{-1} B_1(x, t) + \cdots. \end{aligned}$$

この時 (SL), (D) の特性方程式は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} \det(\lambda - A_0(x, t)) &= \lambda^2 + \det A_0(x, t) \\ &= \lambda^2 - \frac{1}{4} (4x^2 - 4u_0x + u_0^2 - 4v_0) h(x, t)^2 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \det(\mu - B_0(x, t)) &= \mu^2 + \det B_0(x, t) \\ &= \mu^2 - \frac{1}{4} (4x^2 - 4u_0x + u_0^2 - 4v_0) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

ここで

$$h(x, t) = \frac{1}{4g^2} (4x^2 + 2u_0x + u_0^2 + 2v_0 + 4c).$$

定義 4.1 (線形方程式 (SL) の turning point と Stokes 曲線)

- (i) 特性方程式 (6) が重根を持つような $x = z(t)$ を線形方程式 (SL) の *turning point* と呼ぶ.
- (ii) 特性方程式 (6) の根を

$$\lambda_{\pm}(x, t) = \pm \sqrt{-\det A_0(x, t)}$$

とおく. このとき, *turning point* $x = z(t)$ から伸びる

$$\Im \int_{z(t)}^x (\lambda_+(x, t) - \lambda_-(x, t)) dx = 0$$

で定義される曲線を線形方程式 (SL) の *Stokes 曲線* と呼ぶ.

- (iii) $x = z(t)$ が線形方程式 (SL) の *turning point* であるとする. このとき

- (I) $x = z(t)$ が 特性方程式 (6) の判別式の 1 位の零点なら $x = z(t)$ を *simple turning point* と呼ぶ.
- (II) $x = z(t)$ が 特性方程式 (6) の判別式の 2 位の零点なら $x = z(t)$ を *double turning point* と呼ぶ.

今, 線形方程式 (SL) の特性方程式 (6) の判別式は $-\det A_0(x, t)$ となる. よって, この定義より今考えている線形方程式 (SL) は一般には

$$\frac{1}{4} (4x^2 - 4u_0x + u_0^2 - 4v_0) = 0$$

から得られる 2 つの simple turning point $x = a_1(t), a_2(t)$ と

$$h(x, t) = \frac{1}{4g^2} (4x^2 + 2u_0x + u_0^2 + 2v_0 + 4c) = 0$$

から得られる 2 つの double turning point $x = b_1(t), b_2(t)$ を持つことがわかる.

5 非線形方程式と Lax pair の関係

この節では非線形方程式と Lax pair の関係について見ていく. 非線形方程式と Lax pair の間には次のような関係が存在する. (証明については [N] 参照)

事実 5.1 (A) (6) の判別式と (7) の判別式の間には次のような関係式が成立する.

$$\det A_0(x, t) = h(x, t)^2 \det B_0(x, t) \quad (8)$$

(B) (7) の根を

$$\mu_{\pm} = \pm \sqrt{-\det B_0(x, t)}$$

とおいた時, 次が成立する.

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_{\pm} = \frac{\partial}{\partial x} \mu_{\pm} \quad (\text{復号同順}) \quad (9)$$

(C) $C(t, \nu)$ は次のような形で書くことが出来る.

$$C(t, \nu) = \prod_{j=1}^2 (\mu - \det B_0(x, t)) \Big|_{\substack{\mu=\nu/2 \\ x=b_j(t)}} \quad (10)$$

これらの事実を使うと次がわかる.

定理 5.1 $t = \tau^l$ が非線形方程式 (P) の第 1 種の turning point であるとき, 線形方程式 (SL) では $t = \tau^l$ において simple turning point $x = a(t)$ とある double turning point $x = b_l(t)$ ($l = 1$ 又は 2) が合流し, 次の関係式が成立する.

$$\int_{a(t)}^{b_l(t)} (\lambda_+(x, t) - \lambda_-(x, t)) dx = \frac{1}{4} \int_{\tau^l}^t (\nu_m(t) - \nu_{m'}(t)) dt. \quad (11)$$

ここで $\nu_m(t), \nu_{m'}(t)$ は $t = \tau^l$ で合流する $C(t, \nu) = 0$ の 2 つの根. 特に, t がその turning point $t = \tau^l$ からでる Stokes 曲線上にあるとき (SL) では $a(t)$ と $b_l(t)$ を結ぶ Stokes 曲線が存在する.

定理 5.2 $t = \tau^{\text{II}}$ が非線形方程式 (P) の第 2 種の *turning point* であるとき, 線形方程式 (SL) では $t = \tau^{\text{II}}$ において 2 つの *double turning point* $x = b_1(t), b_2(t)$ が合流し, 次の関係式が成立する.

$$\int_{b_1(t)}^{b_2(t)} (\lambda_+(x, t) - \lambda_-(x, t)) dx = \frac{1}{2} \int_{\tau^{\text{II}}}^t (\nu_m(t) - \nu_{m'}(t)) dt. \quad (12)$$

ここで $\nu_m(t), \nu_{m'}(t)$ は $t = \tau^{\text{II}}$ で合流する $C(t, \nu) = 0$ の 2 つの根. 特に t がその *turning point* $t = \tau^{\text{II}}$ からでる Stokes 曲線上にあるとき, (SL) では 2 つの *double turning point* $x = b_1(t), b_2(t)$ を結ぶ Stokes 曲線が存在する.

この 2 つの定理からわかるように t が非線形方程式 (P) の Stokes 曲線上にあるとき, 線形方程式 (SL) では 2 つの *turning point* が結ばれるという意味での Stokes 図形の退化が見られる. この様子は [N] で行なったように t を非線形方程式 (P) の *turning point* のまわりで動かし, その時の線形方程式 (SL) の Stokes 図形の変化を調べることにより確認することができる. さらに, 今回の非線形方程式 (P) の Stokes 図形においても [N] で見た例と同様に Stokes 曲線の交点がいくつか (20 個) 見つかり, さらに t をこの交点のまわりで動かしてみると「 t が非線形方程式 (P) の Stokes 曲線上にのっていなくても線形方程式 (SL) で Stokes 図形の退化が見られる点がある」ことがわかる. これらの点を集めると [N] で見たのと同様に交点から片側に伸びる半曲線となる. Painlevé 方程式に対する WKB 解析の議論によればこのように線形方程式 (SL) の Stokes 図形が退化を起こすような場所では非線形方程式 (P) の解が Stokes 現象を起こすと考えられ, この半曲線は (P) の Stokes 図形に新しい Stokes 曲線として描き足されるべき曲線であると考えられる. この半曲線は高階線形方程式における新しい Stokes 曲線 ([BNR], [AKT1], [AKT3] 参照) と関係があると考えられこの曲線について調べることは非常に興味深いと思われる.

次に Stokes 曲線が交わっていればそこからは必ず新しい Stokes 曲線が伸びるのかどうかを説明する. 交点のまわりで t を動かし, その時の (SL) の Stokes 図形の変化を追いかければわかるが交点があればそこから必ず新しい Stokes 曲線が伸びるという訳ではない. 実は [KKNT] の section 3 でみるように t が交点にある時の (SL) の Stokes 図形をみればその交点から新しい Stokes 曲線が伸びるかどうか判別されるのである. ここで各交点での (SL) の Stokes 図形を見てみよう. 3 本の Stokes 曲線が出ている点が *simple turning point*, 4 本の Stokes 曲線が出ている点が *double turning point* である.

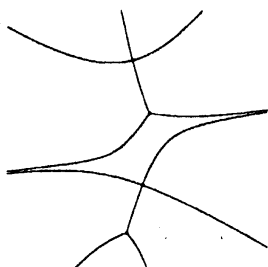


図 7: $t = T_1$

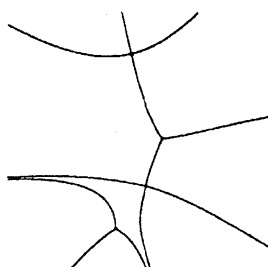


図 8: $t = T_2$

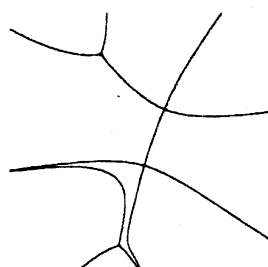


図 9: $t = T_3$

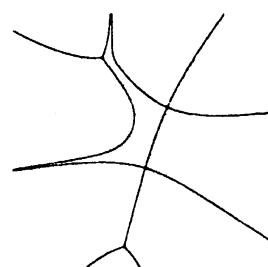
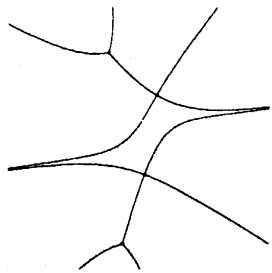
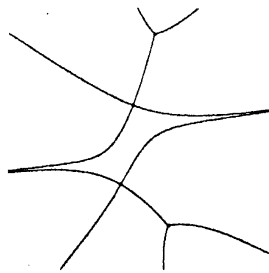
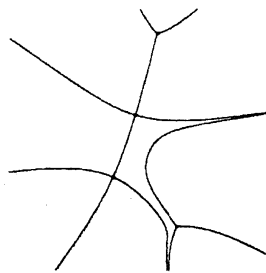
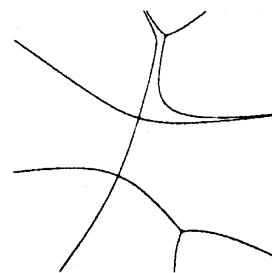
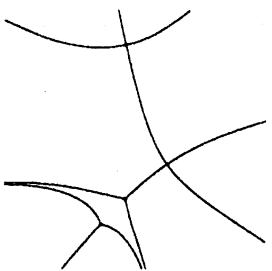
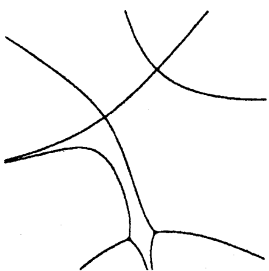
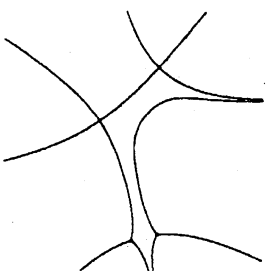
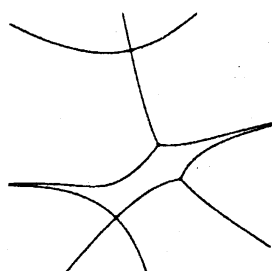
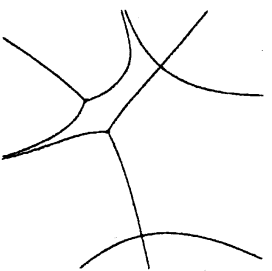
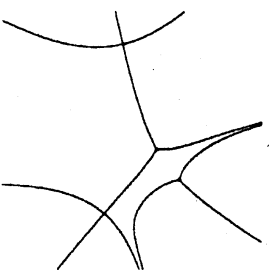
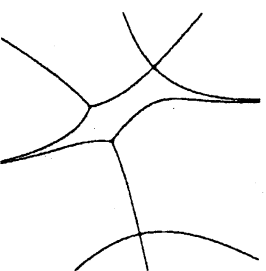
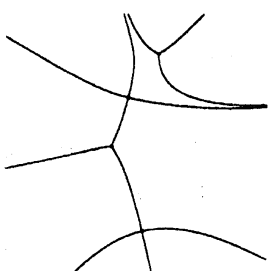
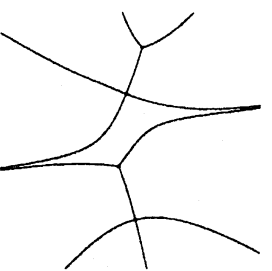
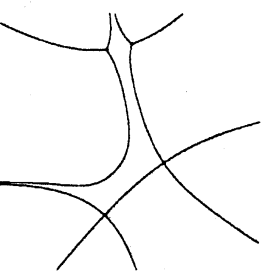
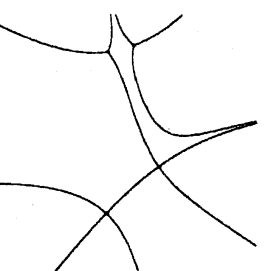
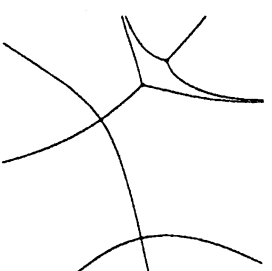


図 10: $t = T_4$

図 11: $t = T_5$ 図 12: $t = T_6$ 図 13: $t = T_7$ 図 14: $t = T_8$ 図 15: $t = T_9$ 図 16: $t = T_{10}$ 図 17: $t = T_{11}$ 図 18: $t = T_{12}$ 図 19: $t = T_{13}$ 図 20: $t = T_{14}$ 図 21: $t = T_{15}$ 図 22: $t = T_{16}$ 図 23: $t = T_{17}$ 図 24: $t = T_{18}$ 図 25: $t = T_{19}$ 図 26: $t = T_{20}$

この図のうち新しい Stokes 曲線が出る交点は $t = T_i$ ($i = 2, 3, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 18, 19, 20$) であり [KKNT] で Lax-adjacent と呼ばれている交点である. つまり, (SL) の

Stokes 図形において 3 つの turning point が Stokes 曲線によりつながっている状態で、そのうち間に挟まれている turning point からでる隣あった 2 本の Stokes 曲線によって残りの 2 つの turning point が結ばれている状態になっている交点である。

次にこれらの交点から新しい Stokes 曲線を描くことを考える。[N] ではこの曲線を描くとき線形方程式 (SL) の Stokes 図形が退化する点を求めてくることによりこの曲線を描いていた。しかし、[KKNT] の section 4 で見るようにこの交点を作る 2 本の Stokes 曲線に対して定理 1, 2 で得た式を各函数の分枝に注意しながら用いることによりこの (SL) の Stokes 図形の退化を非線形の式の言葉で読みかえることができる。(非線形方程式 (P) の Stokes 曲線の定義式に似た形、つまり $C(t, \nu) = 0$ の 2 つの根の差の積分の虚部が 0 という形で書ける.)。この非線形の式で表現された曲線を描くと次のようになる。ここで点線は実際には (SL) の Stokes 曲線の退化が見られない部分、点線の中にある点は高階線形方程式の virtual turning point に相当すると考えられる点である。この “virtual turning point” において線形方程式 (SL) では

$$\int (\lambda_+(x, t) - \lambda_-(x, t)) dx$$

の積分端点にある 2 つの turning point を代入し適当な積分路で積分すればその積分値が 0 になることが確認されている。

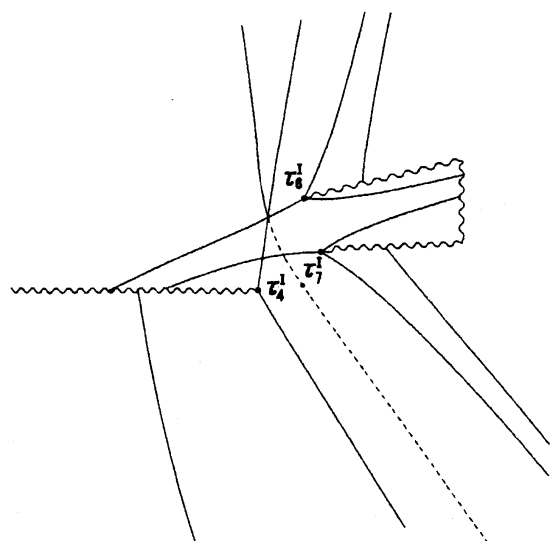


図 27: 1st sheet

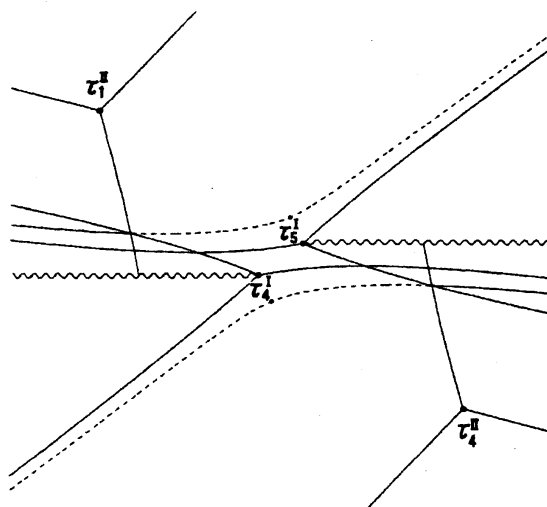


図 28: 2nd sheet

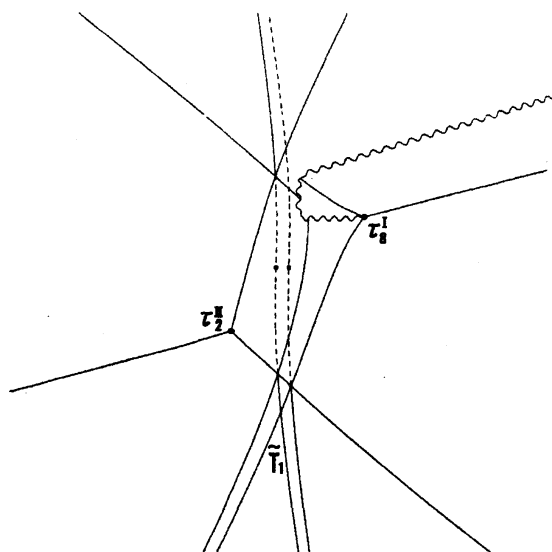


図 29: 3rd sheet

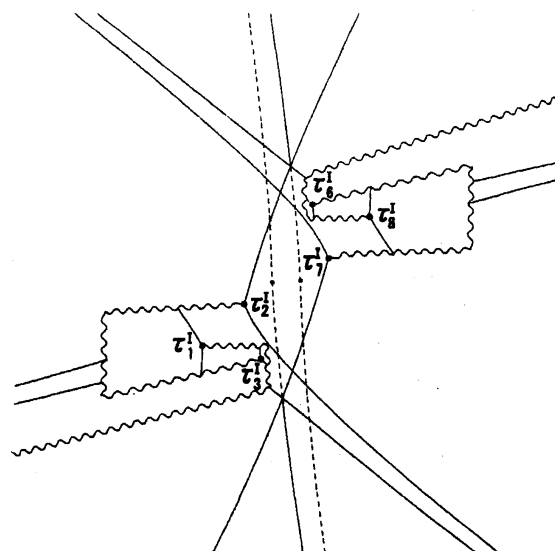


図 30: 4th sheet

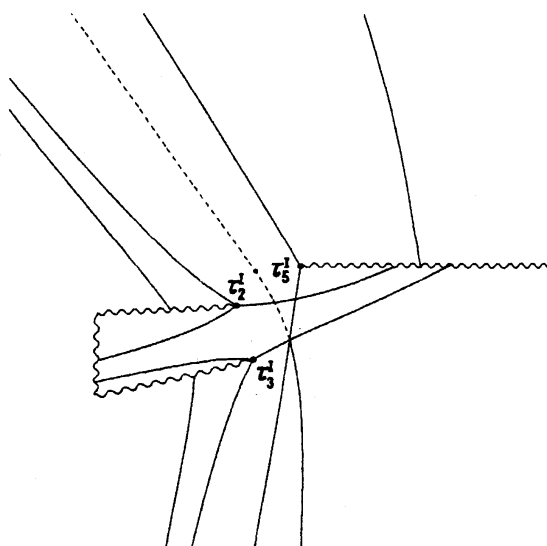


図 31: 5th sheet

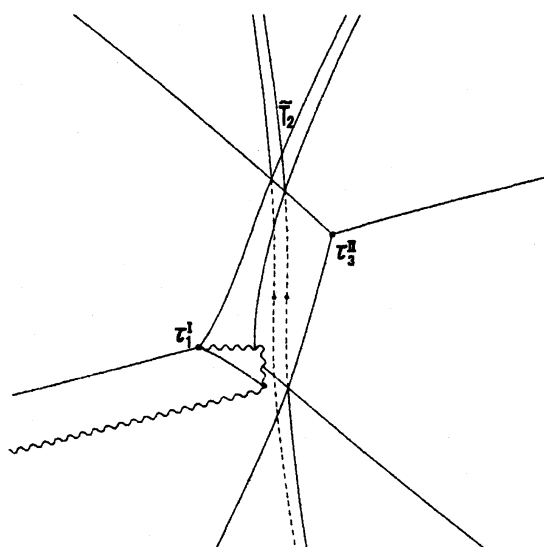
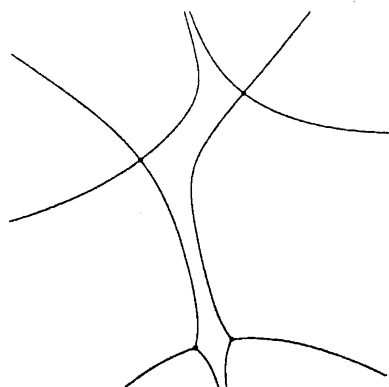
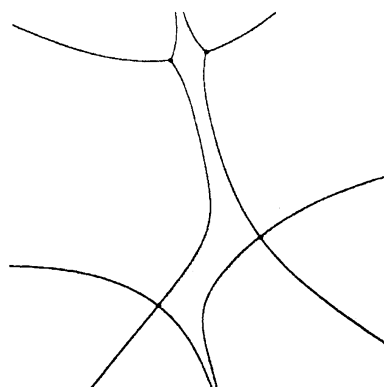


図 32: 6th sheet

この図において新しい Stokes 曲線と通常の Stokes 曲線との交点が 2 箇所見つかる ($t = \tilde{T}_1, \tilde{T}_2$). ここでの (SL) の Stokes 図形は次のようになり新しい Stokes 曲線が伸びる形にはなっていない。

図 33: $t = \tilde{T}_1$ 図 34: $t = \tilde{T}_2$

よって、この非線形方程式 (P) の Stokes 図形に必要な Stokes 曲線は全て描かれたと考えられる。非線形方程式 (P) の Stokes 図形において点線の部分で何故 (SL) の Stokes 図形が退化を起こさないのか、virtual turning point と考えられる点はどのような点なのかについてはあまりよくわかっていないが非常に興味深い問題である。

参考文献

- [AKT1] T.Aoki, T.Kawai and Y.Takei, WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter.II, -Multiple-scale analysis of Painlevé transcendents, Conf.Proc. "Structure of Solutions of Differential Equation", World Scientific, 1996, 1-49.
- [AKT2] T.Aoki, T.Kawai and Y.Takei, New turning points in the exact WKB analysis for higher-order ordinary differential equations, Analyse algébrique des perturbations singulières. I, Hermann, 1994, 69-84.
- [AKT3] T.Aoki, T.Kawai and Y.Takei, On the exact WKB analysis for the third order ordinary differential equations with a large parameter, Asian J. Math., 2, 1998, 625-640.
- [BNR] H.L.Berk, W.M.Nevins and K.V.Roberts, New Stokes' line in WKB theory, J. Math. Phys., 23, 1982, 988-1002.
- [GJP] P.R.Gordoa, N.Joshi and A. Pickering, On a Generalized 2+1 Dispersive Water Wave Hierarchy, Publ.RIMS Kyoto Univ.,37, 2001, 327-347.
- [KKNT] T.Kawai, T.Koike, Y.Nishikawa and Y.Takei, On the Stokes geometry of higher order Painlevé equations, Preprint, RIMS Kyoto Univ..
- [KT1] 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学, 岩波講座 現代数学の展開, 岩波書店, 1998.

- [KT2] T.Kawai and Y.Takei, WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter.I, Adv. in Math.,118, 1996, 1-33.
- [KT3] T. Kawai and Y. Takei, WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. III, Adv. in Math., 134, 1998, 178-218.
- [N] 西川享宏, P_{II} - P_{IV} hierarchy の WKB 解析, 高階 Painlevé 方程式の Stokes 図形の西川現象, 数理解析研究所講究録 1316, 京都大学数理解析研究所, 2003, 19-102
- [NT] Y.Nishikawa and Y.Takei, On the structure of the Riemann surface in the Painlevé hierarchies, In Prep.
- [T] Y. Takei, An explicit description of the connection formula for the first Painlevé equation, "Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear", Kyoto Univ. Press, 2000, pp. 271-296.